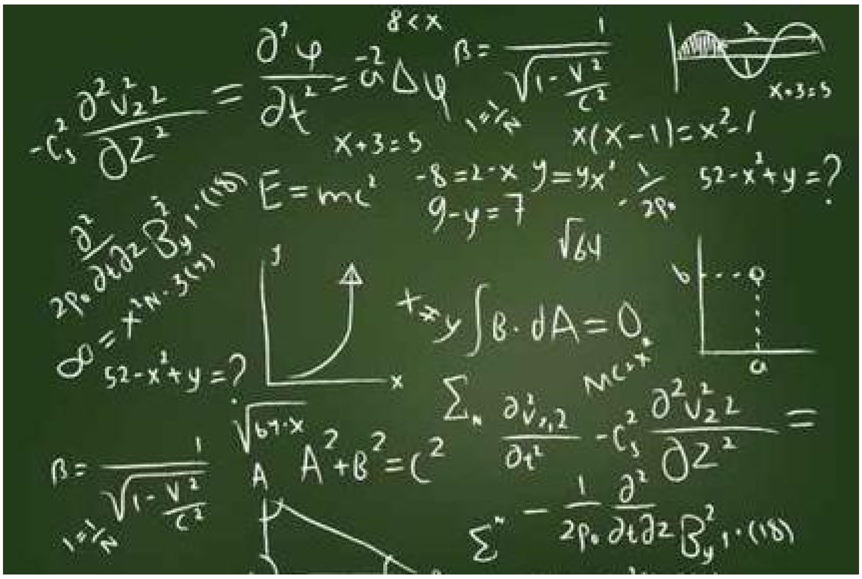
Joachim Stiller

Materialien zur Mathematik I

Mathematik allgemein



Euklidische Geometrie

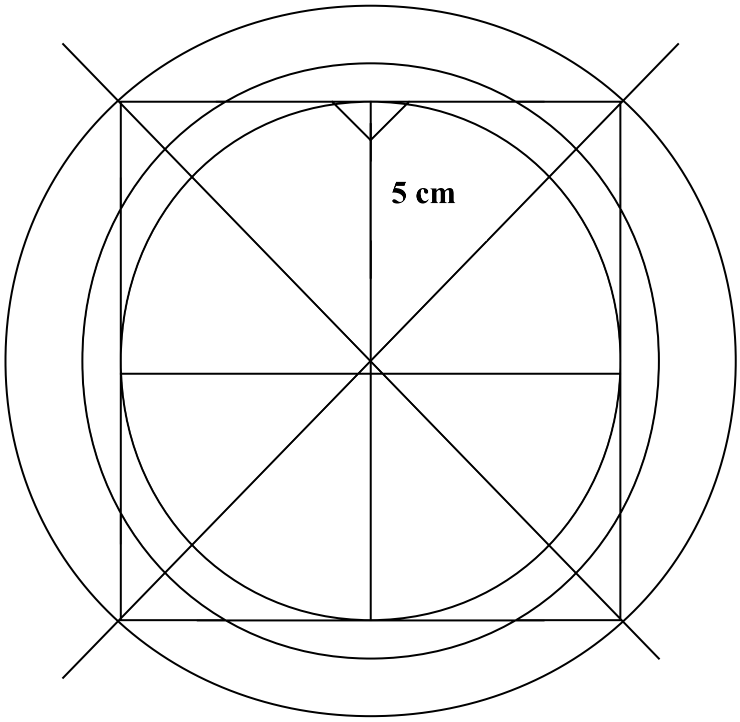
Die Griechen kannten innerhalb der Euklidischen Geometrie drei Probleme, die auf direktem Wege generell unlösbar sind, jedenfalls auf rein geometrischem Wege, d.h. nur mit Zirkel und Lineal, wie die Vorschrift von Plato lautet:

1. die Quadratur des Kreises
2. die Drittelung des Winkels
3. die Verdoppelung des Würfels

Es gibt aber sehr gute zeichnerische Näherungen an die drei Probleme, vor allem auch an die Quadratur des Kreises, die zu einem Synonym für unlösbare Probleme, und damit sprichwörtlich geworden ist.
Bei der **Quadratur des Kreises** geht es darum zu einem Kreis ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt zu zeichnen, oder umgekehrt, zu einem Quadrat einen Kreis mit demselben Flächeninhalt. Beide Lösungen würden anerkannt. Für dieses Problem gibt es keine zeichnerische Lösung, was bereits bewiesen wurde. Das gilt auch für die beiden anderen oben beschriebenen geometrischen Probleme.
So gibt es eine exakte Lösung für die Quadratur des Kreises, die aber „nicht" rein zeichnerisch ist. Sie stammt ursprünglich von Archimedes und wurde von Leonardo da Vinci wiederentdeckt. Und schließlich gibt es die unendliche Lösung von Leonardo da Vinci selber, die aber auch nicht genau 100%ig exakt ist. Bei ihr gibt es immer noch eine wirklich „minimale" Abweichung.
Siehe auch: Schröer/Irle: „Ich aber quadriere den Kreis – Leonardo da Vincis Proportionsstudie"

Die Quadratur des Kreises der Flächen I

Gegeben sei ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 10 cm. Wir zeichnen zunächst den Innenkreis und den Außenkreis und suchen nun die genaue Quadratur des Kreises. Wenn wir nun einen Kreis von genau 100 cm Quadrat (10 cm x 10 cm) mit dem Radius r = 5,642 cm zeichnen, so finden wir dass der Kreis die Seiten des Quadrates in vier Viertel teilt und zwar ziemlich genau, wenn nicht sogar exakt, was zu beweisen wäre. Ich bin zu dieser Überlegung durch einen Satz von Rudolf Steiner angeregt worden der einmal sinngemäß gesagt hat die Quadratur des Kreises entstünde, wenn man ein Quadrat in Rotation versetzt. Dabei entstehen natürlich Außenkreis und Innenkreis die einen Kreisring bilden. Die Quadratur des Kreises muss nun irgendwo dazwischen liegen. Wir müssen also das Teilungsverhältnis möglichst exakt zu bestimmen versuchen. Ich selber habe mir dabei die Frage gestellt, wo nun der Kreis der Quadratur die Seiten des Quadrates schneidet. Schon einfache Überlegung zeigt, dass die Kreis der Quadratur (also der Umkehrung der Quadratur des Kreises) die Seiten des Quadrates in etwa viertelt. Zugrunde liegt dieser Auffassung die Überlegung, die schon Leonardo hatte, dass man nämlich die Quadratur auch jeder Zeit umkehren kann, was sich von selbst verstehen sollte.
Genauere Untersuchungen des an unsere Quadratur des Kreises gebildeten rechtwinkligen Dreiecke (Satz des Pythagoras) zeigen, dass die Genauigkeit der hier vorgestellten Näherung bei etwas mehr, als 98 % liegt, die Abweichung also unter 2 %. Im Verhältnis zur großen Einfachheit der Konstruktion (die meisten anderen Näherungslösungen sind erheblich komplizierter bis hin zur völligen Komplexität der unendlichen Lösung von Leonardo) ist das verblüffend genau.

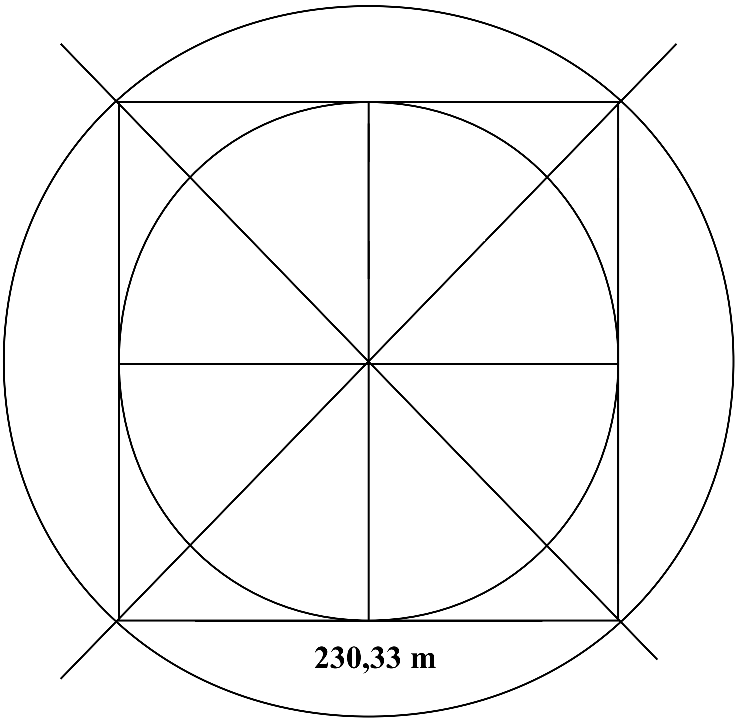


Literaturhinweis:

- Schröer/Irle: „Ich aber quadriere den Kreis – Leonardo da Vincis Proportionsstudie“

Die Ableitung der Lichtgeschwindigkeit aus den Grundmaßen der Cheopspyramide in Metern

Die Cheops-Paramide hat eine Seitenlänge (Basismaß) von 230,33 m.



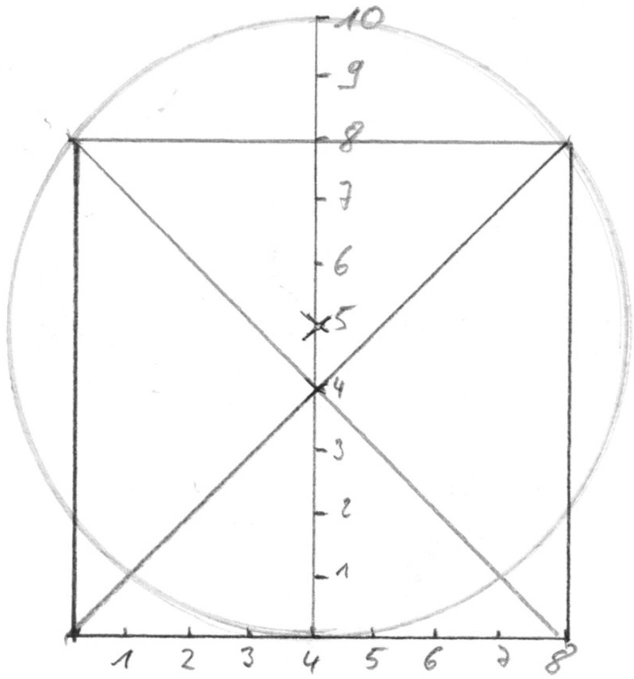
Wenn man nun die Umfänge des kleineren Innenkreises und des größeren Umkreises berechnet, die Umfangslänge des kleineren Innenkreises vom größeren Umkreis abzieht und das Ergebnis mit 100 multipliziert, erhält man fast genau die Lichtgeschwindigkeit von 299.792,46 km / s

Der sich tatsächlich anhand der Maße der Cheopspyramide ergebende Wert liegt etwas darunter: 299.726...

Aber Achtung, dieses Ergebnis bekommt man nur mit dem metrischen System. Aber es ist eine offene Frage, ob die Ägypter das metrische System als Referenzsystem bereits kannten, ja es sogar eingeführt haben. Der 20 km von der Cheops-Pyramide entfernt am Fuße der Pyramide von König Snofru (des Vaters von König Cheops) gefundene angebliche Schlussstein der Cheopspyramide war ursprünglich tatsächlich exaktemente 1 m hoch, und hätte ohne Weiteres als Urmeter dienen können. Vielleicht werden wir es nie erfahren. Basislänge des Schlusssteins: 1,57 m (x 2 = Pi = 3,14).

Die Quadratur des Kreises der Umfänge

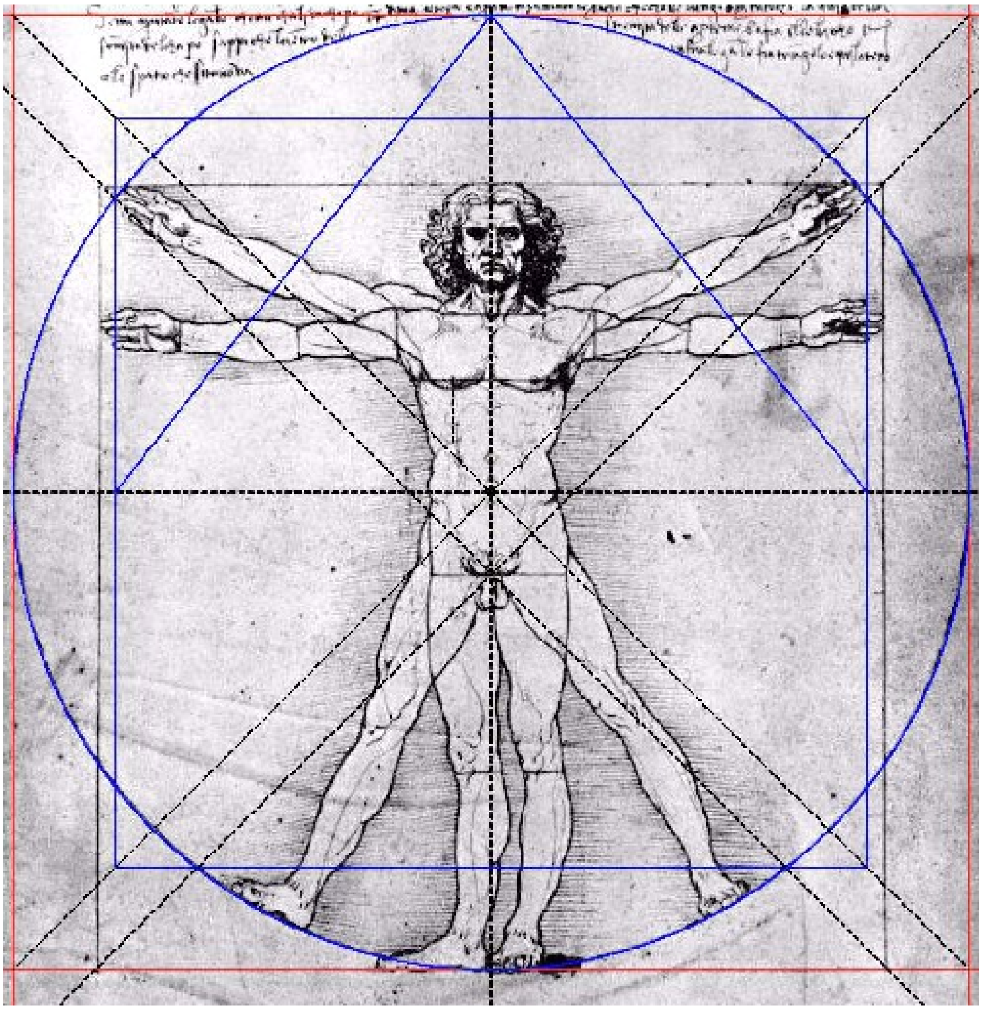
Ich möchte einmal eine Annäherung an die Quadratur des Kreises der Umfänge vorstellen. Angeregt wurde ich dazu durch die Vorträge von Andreas Beutel, dem Gründer und Leiter des Pythagoras-Instituts in Dresden. Der Einfachheit halber stelle ich die Quadratur des Kreises der Umfänge mal eben graphisch dar, denn Bilder sagen bekanntlich mehr als tausend Worte. Ich sage aber gleich noch was zu der Konstruktionszeichnung.



Hier haben wir also eine Annäherung an die Quadratur des Kreises der Umfänge. Der Umfang des Quadrates berechnet sich als das 4-fache der Grundseite, als 4 x 8 Einheiten = 32 Einheiten. Der Umfang des Kreises berechnet sich als Durchmesser d x Kreiszahl Pi, also 10 Einheiten x Pi, oder 10 Einheiten x 3,141 = 31,41 Einheiten.
Die Differenz zwischen den Umfängen des Quadrates (32 Einheiten) und des Kreises (31,41 Einheiten) beträgt nur etwa 0,6 Einheiten, was einer Abweichung von weniger als 2% entspricht.

Hier gilt, was bereits für meine Näherung an die Quadratur des Kreises der Flächen galt: Im Verhältnis zur Einfachheit der Konstruktion ist das verblüffend genau. Übrigens ist die Quadratur des Kreises der Umfänge offensichtlich etwas größer, als die Quadratur des Kreises der Flächen. Interessant ist außerdem, dass in meiner Konstruktion der Quadratur des Kreises der Umfänge der Kreis genau durch die beiden oberen Ecken des Quadrates geht. Und wie ist es bei der Konstruktionszeichnung von Leonardo da Vinci? Ich gebe die Proportionsstudie nach Vitruv von Leonardo da Vinci gleich einmal wieder. Man sieht ganz gut, dass der Kreis noch etwas kleiner ist, als in meiner eigenen Konstruktionszeichnung. Damit ist die

Konstruktionszeichnung von Leonardo allerdings auch etwas ungenauer. Da fragt es sich, ob Leonardo überhaupt eine exakte Quadratur des Kreises zeichnen wollte, oder vielleicht etwas völlig anderes.



Die Quadratur des Kreises der Umfänge II

Hier nun die verbesserter Quadratur des Kreises der Umfänge. Dabei sind die Seite des Quadrates 11 Einheiten und der Radius des Kreises 7 Einheiten. Das Doppelte der Grundseite des Quadrates (22) geteilt durch den Radius (7), was dem Verhältnis nach der Höhe der Cheopspyramide entspricht, ergibt genau die Zahl Pi (3,14). Denn 22/7 ist eine sehr gute Näherung an die Zahl Pi. Diese wurde auch von den alten Ägyptern verwendet. Die Abweichung liegt nur im Promille-Bereich. Für die alten Ägypter war das hinreichend. Sie kannten aber grundsätzlich die Zahl Pi, den golden Schnitt, die goldene Zahl Phi und den Satz des Pythagoras, der gar nicht von Pythagoras stammt, sondern von den alten Ägyptern. Pythagoras hatte ihn nur nach einem 22-jährigen Studienaufenthalt in Ägypten von dort mitgebracht.

Literaturhinweise:

- Klaus Schröer und Klaus Irle: „Ich aber quadriere den Kreis…“ – Leonardo da Vincis Proportionsstudie
- Andreas Beutel: Die harmonische Ordnung des Universums (DVD)
- Andreas Beutel: Die Blume des Lebens und der Quantenraum (DVD)

Der Goldene Schnitt

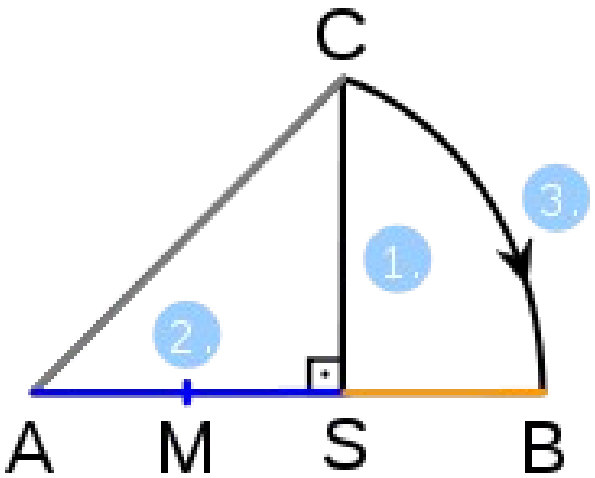
Ich möchte nun einmal den Goldenen Schnitt "so" ausdrücken:

a : b............................= (a + b)................: a

a : ((Wurzel (a²/4 + a²)) - a) = (Wurzel (a²/4 + a²)) : a

Wie ich darauf komme? Durch die äußere Teilung:

Äußere Teilung



- Klassisches Verfahren mit äußerer Teilung:

1. Errichte auf der Strecke AS im Punkt S eine Senkrechte der Länge AS mit dem Endpunkt C.
2. Konstruiere die Mitte M der Strecke AS.
3. Der Kreis um M mit dem Radius MC schneidet die Verlängerung von AS im Punkt B. S teilt AB im Verhältnis des *Goldenen Schnittes*.

Null geteilt durch Null

0/0 = 0, Unendlich und 1 zugleich. Beweis:
Gegeben seien die folgenden drei Funktionen:
f1(x) = 0/x = 0
f2(x) = x/0 = Unendlich
f3(x) = x/x = 1

Wenn wir nun für x = 0 einsetzen, erhalten wir jedes Mal 0/0, aber als korrektes Ergebnis 0, Unendlich und 1. Alle drei Lösungen sind eindeutig. q.e.d.
In der höheren Mathematik kann man zwar durch 0 teilen, aber nicht Null selber. Letzteres bleibt auch in der höheren Mathematik nicht definiert. Ein wirklich interessantes Problem.

Hier die Lösung von Crane

Zur Frage „Was ist 0 geteilt durch 0?“ habe ich mal die entsprechenden Abschnitte aus Wikipedia zur Zahl 0 kopiert und in Anführungszeichen gesetzt um sie von meinen Aussagen zu unterscheiden.

„Jede mögliche Definition der Division einer Zahl durch null verstößt gegen das Permanenzprinzip. Deshalb ist es in aller Regel zweckmäßig, solche Division undefiniert zu lassen.
Für natürliche Zahlen kann die Division als wiederholte Subtraktion angesehen werden: Um die Frage „Wie oft muss man 4 von 12 abziehen, um 0 zu erhalten?“ zu beantworten, also 12 : 4 zu bestimmen, kann man so rechnen:

12-4=8
8-4=4
4-4=0

Die Anzahl der Subtraktionen ist 3.
Also ist **12:4=3**
Bei **12:0** lautet die Frage: „Wie oft muss man 0 von 12 abziehen um 0 zu erhalten?“ Antwort: Keine Anzahl von Operationen bringt das gewünschte Ergebnis.

Anmerkung: Bei **0:0** lautet die Frage: „Wie oft muss man 0 von 0 abziehen, um 0 zu erhalten?“ Antwort: Jede beliebige (also keine eindeutige) Anzahl von Operationen bringt das gewünschte Ergebnis.**“**

Dies bedeutet also nicht, dass 0:0 gleich unendlich ist, sondern das es z.B. im Bereich der natürlichen Zahlen unendlich viele Lösungen gibt. Also 1 ist eine Lösung, 2 ist eine, 3 ist eine,1278423540 ist auch eine usw. Unendlich bezeichnet mit dem Operator ∞ ist dabei so denke ich auch eine Lösung, aber eben nur eine.

„Für beliebige Zahlenmengen ist die Division als Umkehrung der Multiplikation definiert. Bei der Division von b durch a sucht man eine Zahl x, welche die Gleichung **a*x=b** erfüllt. Diese Zahl x – sofern sie eindeutig bestimmt ist – schreibt man als Quotienten **x=b/a**

Im besonderen Fall, dass **a = 0** ist, gibt es kein eindeutiges Ergebnis: Wir suchen eine Lösung der Gleichung **0*x=b**.
Im Fall $\mathbf{b \neq 0}$ ist die Gleichung unlösbar, weil es keine Zahl x gibt, für die $\mathbf{0*x \neq 0}$ gilt.

Im Fall **b = 0** wird die Frage, welche Zahl x die Gleichung erfüllt, trivial: Jede Zahl x erfüllt die Gleichung **0 * x = 0**.

Also gibt es in beiden Fällen kein eindeutiges Ergebnis bei der Division durch null. Beim Rechnen mit reellen (oder komplexen) Zahlen ist es also nicht möglich, durch null zu dividieren, da diese Operation kein eindeutiges Ergebnis hätte**“**

Auch hier sieht man, dass 0:0 nicht Unendlich ist, sondern dass sich entweder eine unlösbare Gleichung ergibt oder eine Gleichung ohne eindeutige Lösung.

Die Fibonacci-Zahlen und die Zahl Pi

Gegeben seien vier aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen b-a, a, b, b+a. Bildet man aus diesen Zahlen ein Rechteck (siehe Abbildung), so ist die Differenz der zwei Winkel u-v gleich 45°. Dann ergibt sich also:

$$\pi / 4 = \arctan (b / a) - \arctan ((b - a) / (b + a))$$

und allgemein:

$$\pi / 4 = \arctan (F_{n+1} / F_n) - (F_{n-1} / F_{n+2})$$

Zum Beispiel wird für 3, 5, 8, 13

$$\pi / 4 = \arctan (8 / 5) - \arctan (3/13).$$

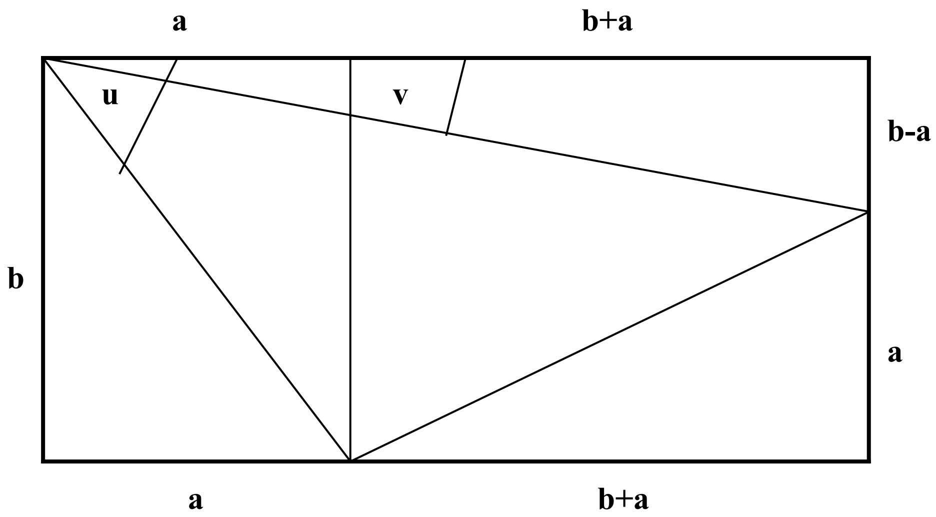
Diese Beziehung gilt auch für die Lucas-Zahlen und außerdem für jede beliebige Zahlenfolge, welche die Rekursionsgleichung

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

erfüllt, zum Beispiel für 1, 7, 8, 15... wird

$$\pi / 4 = \arctan (8 / 7) - \arctan (1 / 15)$$

Zeichnung



$$\pi / 4 = \arctan (b / a) - \arctan ((b - a) / (b + a))$$

Zeckendorf-Zerlegung

Nach einer Entdeckung von Edouard Zeckendorf kann jede natürliche Zahl als Summe von zwei oder mehr, nicht notwendig aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen dargestellt werden.

Zeckendorf-Zerlegung II

Nach meiner eigenen Entdeckung kann jede natürliche Zahl als Summe ein oder mehrerer, nicht notwendig aufeinanderfolgender Potenzen der Zahl 2 + der Zahl 1 dargestellt werden. Möglicherweise ist diese Zerlegung auch vor mir schon bekannt gewesen. Die zu dieser Folge gehörende Formel lauter:

fn = 2 x fn-1

In Zahlen ausgedrückt: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Diese wirklich hübsche Folge stellt praktisch einen oberen Grenzwert für die Möglichkeiten einer Zeckendorf-Zerlegung dar. Sobald die Intervalle größer werden, ist eine Zeckendort-Zerlegung nicht mehr möglich. Die Intervalle müssen also kleiner oder gleich den Intervallen dieser Folge sein, wenn eine Zeckendorf-Zerlegung möglich sein soll.

Eine untere Grenzfolge stellt dann die Folge 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ... dar.

Eine mittlere Grenzfolge stellt dann die Folge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... dar, die Reihe der natürlichen Zahlen ∠. Auch sie genügt der Zeckendorf-Zerlegung.

Eine besondere Folge

Eine wie ich finde ebenfalls besonders hübsche Folge stellt diese dar:

fn = fn-1 + (n-1)

In Zahlen ausgedrückt: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, ...

Reihen und Konvergenz

Sehen wir uns folgende Folge an:

In Zahlen ausgedrückt: 1/2 1/4 1/8, 1/16, 1/32, 1/64. Diese Folge ist Konvergent.

Und nun die dazugehörige Reihe: 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + ...

Die Summe dieser Reihe ist genau 1. Die Reihe ist Konvergent. Dadurch, dass aber die Summe dieser Reihe genau 1 ist, können wir uns überlegen, dass diese Reihe einen Grenzfall in Bezug auf die Konvergenz darstellt. Reihen, deren Intervalle kleiner oder gleich den Intervallen dieser Folge sind, sind grundsätzlich konvergent. Sind die Intervalle hingegen größer, so sind die Reihen invergent.
Ein Beispiel für eine weiter konvergente Reihe: 1/3 + 1/6 + 1/9 + 1/12 + 1/15 + 1/18
Die Summe dieser Reihe liegt bei genau 2/3, wie man sich leicht überzeugen kann.

Zu den imaginären Zahlen

$$\mathbf{x = y + iz}\ \textbf{(Gauß)}$$

Dann gilt auch: $\mathbf{x^2 = (y + iz)^2}$

oder: $\mathbf{x^2 = y^2 + 2iyz - z^2}$

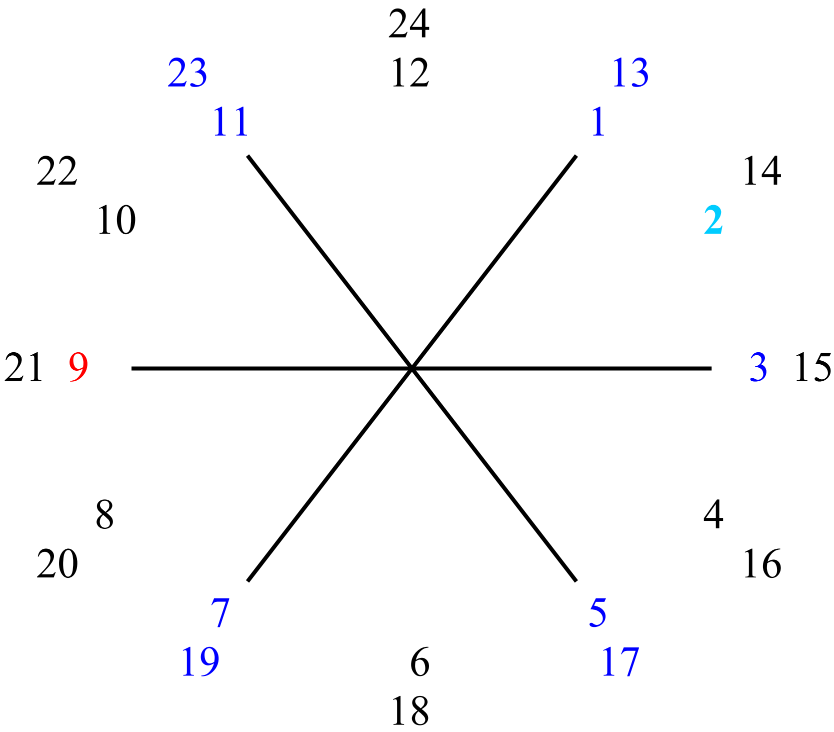
Zur Zahlentheorie

Ich möchte einmal eine Übersicht über die unterschiedlichen Zahlenmengen aus meiner eigenen Sicht geben:

1. Die Menge der natürlichen Zahlen N
2. Die Menge der ganzen Zahlen Z (auch ganzrationale Zahlen)
3. Die Menge der rationalen Zahlen Q (enthält zusätzlich die gebrochen-rationalen Zahlen)
4. Die Menge der irrationalen Zahlen (enthält auch Wurzeln und Logarithmen)
5. Alle Zusammen machen die Menge der reellen Zahlen R aus
6. Darüber hinaus gibt es noch die Menge der Komplexen Zahlen C (auch imaginäre Zahlen)
7. Die Menge der Quanternionen möchte ich hier einmal weglassen.

Das System der Primzahlen I

(für die ersten 24 Zahlen)



Das System der Primzahlen II

1	**13**	**25**	**37**	**49**	**61**	**73**	**85**
2	**14**	**26**	**38**	**50**	**62**	**74**	**86**
3	**15**	**27**	**39**	**51**	**63**	**75**	**87**
4	**16**	**28**	**40**	**52**	**64**	**76**	**88**
5	**17**	**29**	**41**	**53**	**65**	**77**	**89**
6	**18**	**30**	**42**	**54**	**66**	**78**	**90**
7	**19**	**31**	**43**	**55**	**67**	**79**	**91**
8	**20**	**32**	**44**	**56**	**68**	**80**	**92**
9	**21**	**33**	**45**	**57**	**69**	**81**	**93**
10	**22**	**34**	**46**	**58**	**70**	**82**	**94**
11	**23**	**35**	**47**	**59**	**71**	**83**	**95**
12	**24**	**36**	**48**	**69**	**72**	**84**	**96**

97	**109**	**121**	**133**	**145**	**157**	**169**	**181**
98	**110**	**122**	**134**	**146**	**158**	**170**	**182**
99	**111**	**123**	**145**	**147**	**159**	**171**	**183**
100	**112**	**124**	**136**	**148**	**160**	**172**	**184**
101	**113**	**125**	**137**	**149**	**161**	**173**	**185**
102	**114**	**126**	**138**	**150**	**162**	**174**	**186**
103	**115**	**127**	**139**	**151**	**163**	**175**	**187**
104	**116**	**128**	**140**	**152**	**164**	**176**	**188**
105	**117**	**129**	**141**	**153**	**165**	**177**	**189**
106	**118**	**130**	**142**	**154**	**166**	**178**	**190**
107	**119**	**131**	**143**	**155**	**167**	**179**	**191**
108	**120**	**132**	**144**	**156**	**168**	**180**	**192**

Mein Beweis, dass die Primzahlenreihe unendlich ist

Mein Beweis ist denkbar einfach: Ich nehme die ersten 12 Zahlen auf dem Zahlenstrahl, dann noch einmal 12 Zahlen, und dann verdopple ich jeweils die Abschnitte, also die nächsten 24 Zahlen, dann 48 Zahlen, dann 96 Zahlen usw. Und nun zeigt sich, dass in jedem folgenden Abschnitt, also jeder folgenden Zahlenmenge, die Anzahl der darin enthaltenen Primzahlen exponentiell ansteigt... Die Wahrscheinlichkeit, dass die Reihe der Primzahlen irgendwann abbricht, liegt also exakt bei 0... Das ist der klare Beweis, dass die Primzahlenreihe unendlich ist... q.e.d.

Ich finde. mit Euler hat mein Bewes nur mehr wenig zu tun... Euler denkt immer noch zu kompliziert... Mein Beweis ist viel einfacher und auch viel anschaulicher und praktisch jeder Mittelstufenschüler kann ihn verstehen. Euler denkt hyperbolisch... Ich denke exponentiell... Das ist erheblich einfacher... Und auch anschaulicher... Man müsste der Liste der 6 Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlenreihe also noch meinen eigenen Beweis als 7. Beweis hinzufügen...
Genau auf die Gleiche Weise geht denn auch der Beweis der Unendlichkeit der Reihe der „Primzahlen-Paare“!!!

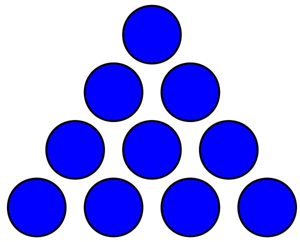
Ich nehme die ersten 12 Zahlen auf dem Zahlenstrahl, dann noch einmal 12 Zahlen, und dann verdopple ich jeweils die Abschnitte, also die nächsten 24 Zahlen, dann 48 Zahlen, dann 96 Zahlen usw. Und nun zeigt sich, dass in jedem folgenden Abschnitt, also jeder folgenden Zahlenmenge, die Anzahl der darin enthaltenen Primzahlenpaare!!! exponentiell ansteigt... Die Wahrscheinlichkeit, dass die Reihe der Primzahlenpaare irgendwann abbricht, liegt also exakt bei 0... Das ist der klare Beweis, dass die Reihe der Primzahlenpaaare unendlich ist... q.e.d.

Literaturhinweise:

- Gerhard Kowol: „Primzahlen“
- Lotte Volkmer: „Zahlenphänomene“

Die Dreieckszahlen

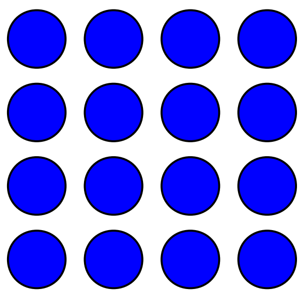
Eine **Dreieckszahl** ist eine Zahl, die der Summe aller Zahlen zwischen 1 und der Obergrenze n entspricht. Beispielsweise ist die 10 eine Dreieckszahl, da 1 + 2 + 3 + 4 = 10 ist. Die ersten Dreieckszahlen sind:
0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 36, 45, 55, ...
Die Bezeichnung Dreieckszahl leitet sich von der geometrischen Figur des Dreiecks her. Die Anzahl der Steine die man zum Legen eines gleichseitigen Dreiecks benötigt, entspricht immer einer Dreieckszahl. Aus zehn Steinen lässt sich beispielsweise ein Dreieck legen bei dem jede Seite von vier Steinen gebildet wird.



Aufgrund dieser Verwandtschaft mit einer geometrischen Figur zählen die Dreieckszahlen zu den figurierten Zahlen, zu denen auch die Quadratzahlen und die Kubikzahlen gehören. Schon Pythagoras hat sich mit den Dreieckszahlen beschäftigt. Sie galten ihm als heilig.
Berechnung:
Die n-te Dreieckszahl ist die Summe der Zahlen von 1 bis n.

Die Quadratzahlen

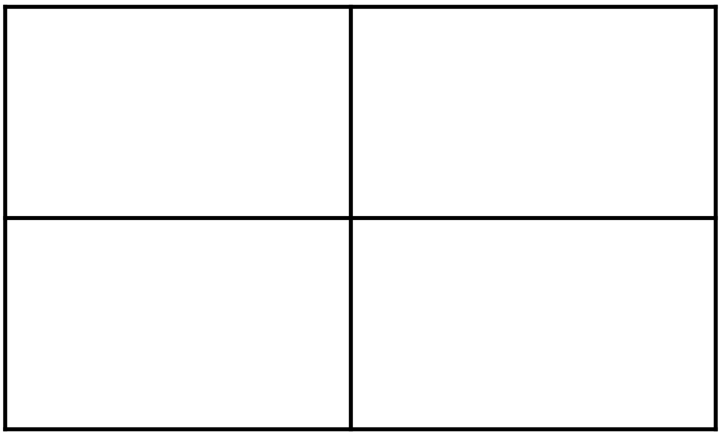
Eine **Quadratzahl** ist eine Zahl, die durch die Multiplikation einer ganzen Zahl mit sich selbst entsteht. Beispielsweise ist 12 x 12 = 144 eine Quadratzahl. Die ersten Quadratzahlen sind:
0, 1, 4, 9, 16 25, 36, 64, 81, 100, ...
Die Bezeichnung Quadratzahl leitet sich von der geometrischen Figur des Quadrates her. Die Anzahl der Steine, die man zum Legen eines Quadrates benötigt, entspricht immer einer Quadratzahl. So lässt sich beispielsweise ein Quadrat mit der Seitenlänge 4 mit Hilfe von 16 Steinen legen.



Aufgrund dieser Verwandtschaft mit einer geometrischen Figur zählen die Quadratzahlen zu den figurierten Zahlen, zu denen auch die Dreieckszahlen und die Kubikzahlen gehören. Diese Begriffe waren schon den griechischen Mathematikern der Antike bekannt.
Genieren der Quadratzahlen:
Jede Quadratzahl n^2 ist die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen.

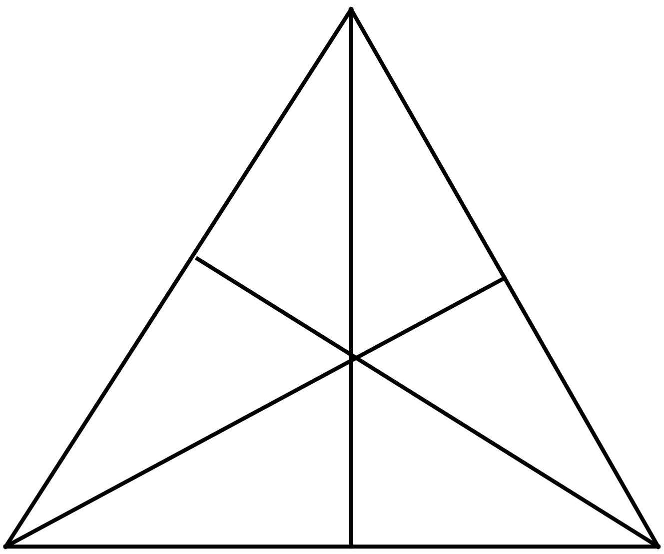
Schachtelproblem 1

Wie viele Rechtecke enthält die untenstehende Figur?



Schachtelproblem 2

Wie viele Dreiecke enthält die unten stehende Figur?



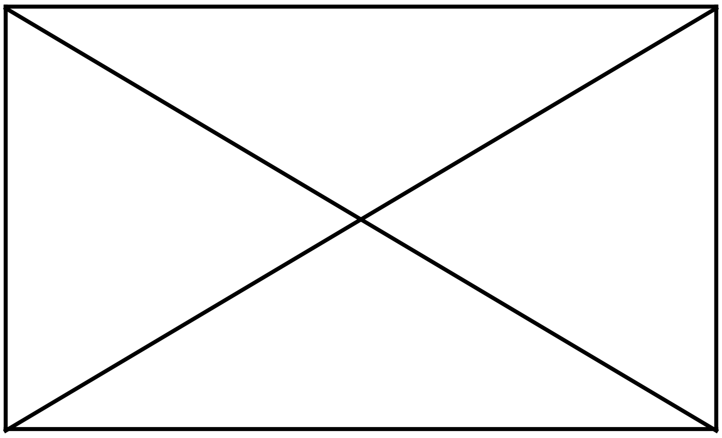
Lösungen:

Schachtelproblem 1: Die Figur enthält 9 Rechtecke.

Schachtelproblem 2: Die Figur enthält 16 Dreiecke.

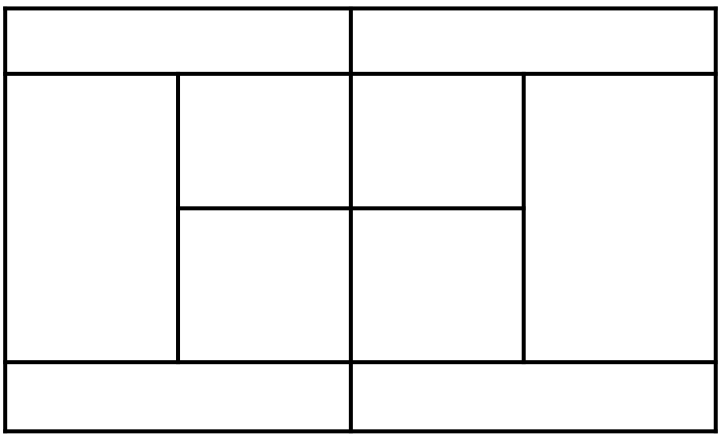
Schachtelproblem 3

Wie viele Dreiecke enthält die unten stehende Figur?



Schachtelproblem 4

Wie viele rechte Winkel enthält die unten stehende Darstellung eines Tennisplatzes?
Und wie viele Rechtecke enthält ein Tennisplatz?



Lösungen:

Schachtelproblem 3: Die Figur enthält 8 Dreiecke.

Schachtelproblem 4: a) Die Figur enthält 10 x 4 = 40 rechte Winkel. b) Die Figur enthält 29 Rechtecke.

Mathematikaufgabe 1

Anna fährt auf der Autobahn 80 Kilometer und braucht dafür genau eine Stunde. Auf der Rückfahrt ist die Straße frei, und Anna kann Gas geben.
Frage: Wie schnell müsste sie auf der Rückfahrt sein, um insgesamt eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h zu erreichen?

Mathematikaufgabe 2

Maria isst für ihr Leben gerne Eis. Sechs mal am Tag kauft sie sich ein Hörnchen mit nur einer Kugel, damit sie möglichst viel davon hat. Maria isst, wie die meisten Münsteraner, nur die Sorten Erdbeer, Vanille und Schokolade. Sie kauft jeden Tag von jeder Sorte genau zwei Kugeln.
Frage: Wie viele Möglichkeiten der Kombination hat Maria, also wie oft könnte sie die Reihenfolge der Sorten wechseln?

Mathematikaufgabe 3

Es geht ums Anstoßen. Auf einer Fete ist eine bestimmte Anzahl Menschen. Jeder stößt mit jedem ein mal an. Insgesamt klingen die Gläser 55 Mal.
Frage: Wie viele Personen sind auf dem Fest?

Mathematikaufgabe 4

Ein Fußballfeld hat die Maße 110 m x 50 m. Wir legen nun ein Absperrband um das Feld herum, und zwar so, dass zwischen Absperrband und Fußballplatz überall 1 m Platz ist.
Frage: Wie lang muss das Absperrband mindestens sein?

Lösungen:

Mathematikaufgabe 1: Anna müsste auf dem Rückweg 240 km/h fahren nicht aber 160 km/h, wie man fälschlicher Weise annehmen könnte.

Mathematikaufgabe 2: Maria hat genau 90 Kombinationsmöglichkeiten zur Auswahl.

Mathematikaufgabe 3: Auf dem Fest befinden sich 11 Personen.

Mathematikaufgabe 4: Das Absperrband muss exakt 326,28 m lang sein.

Zaubertricks und mathematische Rätsel mit Zahlen

Zu diesem Thema möchte ich lediglich einige gute Literaturhinweise geben:

Literaturhinweise (Zaubertricks mit Zahlen):

- Mathematische Zaubertricks für die 5. Bis 10. Klasse – Mathe spielend lernen
- Spielend Lernen – Mathematik – Zaubertricks Band 2 – Mathe spielend lernen
- Zauberhafte Mathematik (Schulbuch)
- Martin Gardner: „Mathematik und Magie“

Literaturhinweise (mathematische Rätsel mit Zahlen):

- Loyd, Sam: Die kniffligsten mathematischen Rätsel
- Loyd, Sam: Mathematische Rätsel und Spiele
- Loyd, Sam/Gardner, Martin: Mathematische Rätsel und Spiele
- Holt, Michael: Neue Mathematische Rätsel für Denker und Tüftler
- Hemme, Heinrich: Die Hölle der Zahlen
- Hemme, Heinrich: Mensch ärgere dich nicht
- Hemme Heinrich: Alice im Knobelland
- Havil, Julian: Das gibt's doch gar nicht (das Buch ist leider sehr teuer)
- Fritsche/Mischak/Krone: Verflixt und zugeknobelt
- Fritsche/Mischak/Krone: Auf der Suche nach dem heiligen Integral
- Degrazia, Josef J: Von Ziffern, Zahlen und Zeichen (das Buch ist schon für den ganz kleinen Geldbeutel erhältlich)

Des Weiteren:

- Acheson, David: 1089 oder das Wunder der Zahlen
- Beutelspacher, Albrecht: Minus mal Minus gibt Plus
- Kröber Günter: Bitte Zahlen
- Stewart, Ian: Pentagonien, Andromeda und die gekämmte Kugel
- Stewart, Ian: Die wunderbare Welt der Mathematik

Werke zum Thema Mathematische Rätsel gibt es sehr viele. Man schaue vielleicht einmal in der nächsten gut sortierten Stadtbücherei.

Magische Quadrate

3er-Quadrat 1. Ordnung – Summe: 5 x 3 = 15

Wir füllen zunächst ein Magisches 3er-Quandrat mit den Zahlen 1 – 9 aus. Für Jedes magische Quadrat gibt es genau 8 Lösungen.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

3er-Quadrat 2. Ordnung – Summe: 6 x 3 = 18

Nun beginnen wir mit der Zahl 2. So entsteht ein magisches Quadrat 2. Ordnung.

3	10	5
8	6	4
7	2	9

3er-Quadrat 3. Ordnung – Summe: 7 x 3 = 21

4	11	6
9	7	5
8	3	10

4er-Quadrat 1. Ordnung – Summe 34

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

4er-Quadrat 2. Ordnung – Summe: 38

5	15	16	2
10	8	7	13
6	12	11	9
17	3	4	14

5er Quadrat 1. Ordnung – Summe 65

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

5er-Quadrat – Summe 70

12	25	8	21	4
5	13	26	9	11
18	6	14	22	17
11	19	2	15	23
24	7	20	3	16

Das Finale

Wir basteln uns nun 9er-Quadrate (81 Felder) aber nicht nach dem Schema aus „Denkspiele der Welt“, sondern nach dem, das ich selber entwickelt habe. Dabei wird das 9er-Quadrat in 9 3er-Quadrate unterteilt, die der Reihe nach in der richtigen Reihenfolge ausgefüllt werden. Es handelt sich somit um eine „selbstähnliche Schachtelung“ des magischen Quadrates. Ich fülle dieses „Meisterquadrat“, wie ich es genannt habe, zunächst nur mit den Ziffern 1 – 9 aus, also im Sinne des Nona-Systems (Zahlensystem mit der Grundzahl 9). Auf diese Weise wird einfach schneller deutlich, was ich meine. Die Besonderheit bei diesem Meisterquadrat ist, dass nicht nur die Summen der Zahlen alle gleich groß sind, sondern ganz logisch auch die Quersummen.

22	29	24	92	99	94	42	49	44
27	25	23	97	95	93	47	45	43
26	21	28	96	91	98	46	41	48
72	79	74	52	59	54	32	39	34
37	35	33	57	55	53	37	35	33
36	31	38	56	51	58	36	31	38
62	69	64	12	19	14	82	89	84
67	65	63	17	15	13	87	85	83
66	61	68	16	11	18	86	81	88

9er-Quadrat 1. Ordnung

Und nun füllen wir das 9er-Quadrat im Sinne des Dezimalsystems aus (Zahlensystem mit der Grundzahl 10). Wir beginnen mit der Zahl 1, so dass ein 9er-Quadrat 1. Ordnung entsteht. Es ist nun lediglich darauf zu achten dass die Reihenfolge beim Ausfüllen der Zahlen genau eingehalten wird. Man schreibe sich dazu vielleicht ein 3-er-Quadrat 1. Ordnung darüber, um sich immer orientieren zu können. Mit ein bischen Übung bracht man diese Hilfestellung nicht mehr. Dann geht alles ganz automatisch.

11	18	13	74	81	76	29	36	31
16	14	12	79	77	75	34	32	30
15	10	17	78	73	80	33	28	35
56	63	58	38	45	40	20	27	22
61	59	57	43	41	39	25	23	21
60	55	62	42	37	44	24	19	26
47	54	49	2	9	4	65	72	67
52	50	48	7	5	3	70	68	66
51	46	53	6	1	8	69	64	71

9er-Quadrat 11. Ordnung

Nun können wir praktisch jedes beliebige magische 9er-Quadrat jeder beliebigen Ordnung ganz leicht ausfüllen. Hier einmal ein 9er-Quadrat 11. Ordnung. Man muss nur zu jeder Zahl 10 addieren.

21	28	23	84	91	86	39	46	41
26	24	22	89	87	85	44	42	40
25	20	27	88	83	90	43	38	45
66	73	68	48	55	50	30	37	32
71	69	67	53	51	49	35	33	31
70	65	72	52	47	54	34	29	36
57	64	59	12	19	14	75	82	77
62	60	58	17	15	13	80	78	76
61	56	63	16	11	18	79	74	81

Literaturhinweis:

- Van Delft/Botermanns: „Denkspiele der Welt“ (das Kapitel zu den magischen Quadraten)

Ein philosophischer Gedanke

Als „Hobbymathematiker“ möchte ich einmal die These wagen, dass der große Gauß, der ich liebend gerne selber wäre, nie gerechnet hat. Er hat einfach nur die „Strukturen hinter den Zahlen“ verstanden. Und die sind oft verblüffend einfach. Hinter den Zahlen stehen immer die Strukturen der Zahlen. Wer die Strukturen versteht, der braucht eben nicht mehr zu rechnen. Dabei haben die Strukturen und die Zahlen objektiven Charakter. Zahlen sind nämlich nichts ausgedachtes. Sie sind eine Offenbarung Gottes.

Eine Anekdote

Gauß soll bereits als Schüler seinen Lehrer verblüfft haben, als er die gestellte Aufgabe alle Zahlen von 1 – 100 zusammenzurechnen, bereits nach wenigen Sekunden richtig löste. Was hatte er gemacht? Er rechnete 1 + 99 = 100

2 + 98 = 100

3 + 97 = 100 usw.

Das ergibt 49 x 100 + den ganzen 100er + die in der Mitte übrigbleibende 50, denn beide haben ja ganz logisch kein Gegenstück. Macht zusammen 5050, oder fifty-fifty, wie ich immer zu sagen pflege.

Wahrscheinlichkeitsrechnung
Das Casino-Paradox

Wenn wir mit einem Würfe würfeln, so liegt die Wahrscheinlichkeit, dass bei nur einem Wurf die Sechs fällt, bei 1:6. Würfeln wir mit zwei Würfeln, so liegt die Wahrscheinlichkeit für zwei Sechser nur noch bei 1:6x6 = 1:36. Das gleiche gilt für zwei Wurfversuche mit nur einem Würfel. Hierbei kommt die 2. Pfadregel, die Produktregel, zur Anwendung. Wir müssen also die Einzelwahrscheinlichkeiten multiplizieren.
Im Spielcasino, beim Roulette-Spiel, gilt genau dasselbe. Setze ich immer nur auf Rot oder Schwarz, so liegt die Wahrscheinlichkeit, dass Rot kommt, bei 1:2. Setze ich mehrfach, dann liegt die Wahrscheinlichkeit, dass zwei mal hintereinander Rot kommt bei nur noch 1:2x2 = 1:4. Die Wahrscheinlichkeit hingegen dass drei mal hintereinander Rot kommt, liegt dann nur noch bei 1:2x2x2 = 1:8. Nehmen wir nun an, ich hätte die ganze Zeit auf Rot gesetzt. Fünf mal hintereinander kam aber Schwarz. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein sechstes Mal hintereinander Schwarz kommt, liegt nun nur noch bei 1:2x2x2x2x2x2 = 1:64.
Zu einem Paradox wird es nur durch folgende Überlegung. Bevor die sechste Kugel fällt, setzt sich ein neuer Spieler mit an den Tisch und setzt ebenfalls auf Rot. Die Wahrscheinlichkeit, dass nun Schwarz kommt, liegt für den neuen Spieler jetzt nicht bei 1:64, sondern bei 1:2. Und das ist eben ein logischer Widerspruch.

Erster Lösungsansatz für das Casino-Paradox:
Es gibt genau zwei Lösungen für das Casino-Paradox, nämlich a) entweder man reduziert die Anwendung der 2. Pfadregel, also der Produktregel, auf einzelne Versuche. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für Rot oder Schwarz generell 1:2, und das auch bei mehrmaligem Setzen hintereinander, weil die einzelnen Versuche nicht durch einen Pfad miteinander verknüpft werden dürfen. Die Produktregel gilt dann eben nur eingeschränkt und ist ausschließlich auf einzelne Versuche überhaupt anwendbar. Der Nachteil wäre dass diese Betrachtungsweise der Wahrscheinlichkeitsrechnung so ziemlich alle Zähne zieht. Oder aber b) wir wenden die 2. Pfadregel auch auf ganze Versuchsreihen an, müssen dann aber feststellen, dass die Wahrscheinlichkeit eben „auch“ vom Betrachterstandpunkt abhängt. Damit liegt aber eben auch eine paradoxe Situation vor. Möglich sind generell beide Betrachtungsweisen.

Zweiter Lösungsansatz für das Casino-Paradox:
Es gibt nur eine einzige Lösung für das Casino-Paradox: Bei genauerem hinsehen stellt sich nämlich heraus, dass der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Pfadregel fehlt, denn dann wäre das Casino-Paradox von vornherein ausgeschlossen. Ich möchte diese fehlende Pfadregel einmal die „Goldene Fingerregel“ nennen. Sie besagt, dass ich mit dem Zeigefinger

immer genau den einen Pfad entlangzugehen habe, auf den sich meine jeweilige Betrachtung bezieht. Dabei kann ich die jeweilige Betrachtung „entweder“ in die Vergangenheit hinein anstellen, „oder“ in die Zukunft. Auf diese Weise ist eine Übergriffigkeit von Vergangenheit auf die Zukunft von vornherein ausgeschlossen. Ich muss nur darauf achten, dass sich der (goldene) Zeigefinger im Baumdiagramm immer an der richtigen Stelle befindet, also im jeweils angenommenen „Hier und Jetzt“. Dann entpuppt sich das Casino-Paradox sofort als reines Scheinproblem

Literaturhinweise:

- Wahrscheinlichkeitsrechung für Dummies
- Franz Kestler: Abi-Countdown: Wahrscheinlichkeitsrechnung - Grundkurs
- Stochastik für Dummies
- Statistik für Dummies

Literaturhinweise zur
Arithmetik und Algebra

- Louis Locher-Ernst: „Arithmetik und Algebra“
- Louis Locher-Ernst: „Die Reihe der natürlichen Zahlen als Geist-Kunstwerk“
- Gerhard Kowol: „Gleichungen“
- Carl Friedrich Gauß: „Disquisitiones arithmeticae“
- Mathematik für Dummies
- Algebra für Dummies
- Analysis I für Dummies
- Analysis II für Dummies
- Differentialgleichungen für Dummies

Literaturhinweise
zur Geometrie

- George Adams: „Strahlende Weltgestaltung“
- George Adams: „Von dem ätherischen Raum“
- Louis Locher-Ernst: „Urphänomene der Geometrie“
- Louis Locher-Ernst: „Projektive Geometrie“
- Louis Locher-Ernst: „Raum und Gegenraum“
- Louis Locher-Ernst: „Geometrisches Metamorphosieren“
- Adam/Wyss: „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“
- Renatus Ziegler: „Platonische Körper – Verwandtschaften, Metamorphosen, Umstülpungen“
- Walter Bühler: „Das Pentagramm und der Goldene Schnitt als Schöpfungsprinzip“
- Euklid: „Die Elemente“
- Kepler: Werke
- Leonard Mlodinow: „Das Fenster zum Universum – Eine kleine Geschichte der Geometrie“
- Günter Aumann: „Euklids Erbe – Ein Streifzug durch die Geometrie und ihre Geschichte“
- Schröer/Irle: „Ich aber quadriere den Kreis – Leonardo da Vincis Proportionsstudie“
- Hermann von Baravalle: Darstellende Geometrie nach dynamischer Methode
- Hermann von Baravalle: Geometrie als Sprache der Formen
- Lawrence Edwards: Geometrie des Lebendigen
- Günter Ewald: „Geometrie“
- Günter Pickert: „Projektive Ebenen“
- Geometrie für Dummies
- Trigonometrie für Dummies

Ende

Zurück zur Starteite